KIT Karlsruhe
Institut für Anthropomatik (IFA)
Humanoids and Intelligence Systems Lab

Prof. Dr.-Ing. R. Dillmann
Adenauerring 2, Geb. 50.20
D-76131 Karlsruhe

Dipl.-Inform. M. Do
Dr.-Ing. N. Vahrenkamp
Dr.-Ing. K. Welke
http://his.anthropomatik.kit.edu/

Robotik I WS 2012/2013

Musterlösungen zur Übung

Dezember 2012

Lösung 1 (Euler- und RPY-Winkel, Quaternionen)

1. $ZX'Z''$-Eulerwinkel
Rotation um gedrehte Koordinatenachsen: $R = R_z(\alpha)R_{x'}(\beta)R_{z''}(\gamma)$

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\beta) & -sin(\beta) \\ 0 & sin(\beta) & cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\gamma) & -sin(\gamma) & 0 \\ sin(\gamma) & cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} cos(\alpha)cos(\gamma) - sin(\alpha)cos(\beta)sin(\gamma) & -cos(\alpha)sin(\gamma) - sin(\alpha)cos(\beta)cos(\gamma) & sin(\alpha)sin(\beta) \\ sin(\alpha)cos(\gamma) + cos(\alpha)cos(\beta)sin(\gamma) & -sin(\alpha)sin(\gamma) + cos(\alpha)cos(\beta)cos(\gamma) & -cos(\alpha)sin(\beta) \\ sin(\beta)sin(\gamma) & sin(\beta)cos(\gamma) & cos(\beta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_z &= cos(\beta) \Rightarrow \beta = acos(a_z) \\ \frac{n_z}{o_z} &= \frac{sin(\gamma)}{cos(\gamma)} = tan(\gamma) \Rightarrow \gamma = atan(\frac{n_z}{o_z}) \\ \frac{a_x}{a_y} &= -\frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} = -tan(\alpha) \Rightarrow \alpha = atan(-\frac{a_x}{a_y}) \end{aligned}$$

2. RPY-Winkel
Rotation um feste Koordinatenachsen: $R = R_z(\gamma)R_y(\beta)R_x(\alpha)$

$$\begin{pmatrix} cos(\gamma) & -sin(\gamma) & 0 \\ sin(\gamma) & cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\beta) & 0 & sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(\beta) & 0 & cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ 0 & sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} cos(\alpha)cos(\beta) & -cos(\gamma)sin(\alpha) + sin(\beta)cos(\alpha)sin(\gamma) & sin(\gamma)sin(\alpha) + sin(\beta)cos(\alpha)cos(\gamma) \\ sin(\alpha)cos(\beta) & cos(\gamma)cos(\alpha) + sin(\beta)sin(\alpha)sin(\gamma) & -sin(\gamma)cos(\alpha) + sin(\beta)sin(\alpha)cos(\gamma) \\ -sin(\beta) & sin(\gamma)cos(\beta) & cos(\gamma)cos(\beta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} n_z &= -sin(\beta) \Rightarrow \beta = asin(-n_z) \\ \frac{o_z}{a_z} &= \frac{sin(\gamma)}{cos(\gamma)} = tan(\gamma) \Rightarrow \gamma = atan(\frac{o_z}{a_z}) \\ \frac{n_y}{n_x} &= \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} = tan(\alpha) \Rightarrow \alpha = atan(\frac{n_y}{n_x}) \end{aligned}$$

3. Bestimmung der Quaternion
Zur Bestimmung der Quaternion q müssen Drehachse und Drehwinkel berechnet werden. Für die Drehachse gilt $R_1\vec{x} = \vec{x}$. Die Drehachse lässt sich folglich über die Eigenvektoren bestimmen:

$$det(R_1 - \lambda E) = det \begin{pmatrix} 0.36-\lambda & 0.48 & -0.8 \\ -0.8 & 0.6-\lambda & 0 \\ 0.48 & 0.64 & 0.6-\lambda \end{pmatrix} = 1 - 1.56\lambda + 1.56\lambda^2 - \lambda^3$$

Charakteristisches Polynom: $1 - 1.56\lambda + 1.56\lambda^2 - \lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$

Eigenvektoren aus $(R_1 - \lambda_1 E)\vec{x} = 0$:

$$\begin{aligned} -0.64x_1 + 0.48x_2 - 0.8x_3 &= 0 \\ -0.8x_1 - 0.4x_2 &= 0 \\ 0.48x_1 + 0.64x_2 - 0.4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \vec{r} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist Lösung und damit Rotationsachse.

Die Berechnung des Rotationswinkels kann über die allgemeine Formulierung der Rotationsmatrix R um einen Einheitsvektor $\vec{v}$ mit dem Winkel α bestimmt werden:

$$R_{\vec{v},\alpha} = \begin{pmatrix} cos(\alpha) + v_1^2(1-cos(\alpha)) & v_1v_2(1-cos(\alpha)) - v_3sin(\alpha) & v_1v_3(1-cos(\alpha)) + v_2sin(\alpha) \\ v_2v_1(1-cos(\alpha)) + v_3sin(\alpha) & cos(\alpha) + v_2^2(1-cos(\alpha)) & v_2v_3(1-cos(\alpha)) - v_1sin(\alpha) \\ v_3v_1(1-cos(\alpha)) - v_2sin(\alpha) & v_3v_2(1-cos(\alpha)) + v_1sin(\alpha) & cos(\alpha) + v_3^2(1-cos(\alpha)) \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$Spur(R) = 3cos(\alpha) + (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(1 - cos(\alpha)) = 1 + 2cos(\alpha)$$

Für die Matrix R_1 aus der Aufgabe gilt:

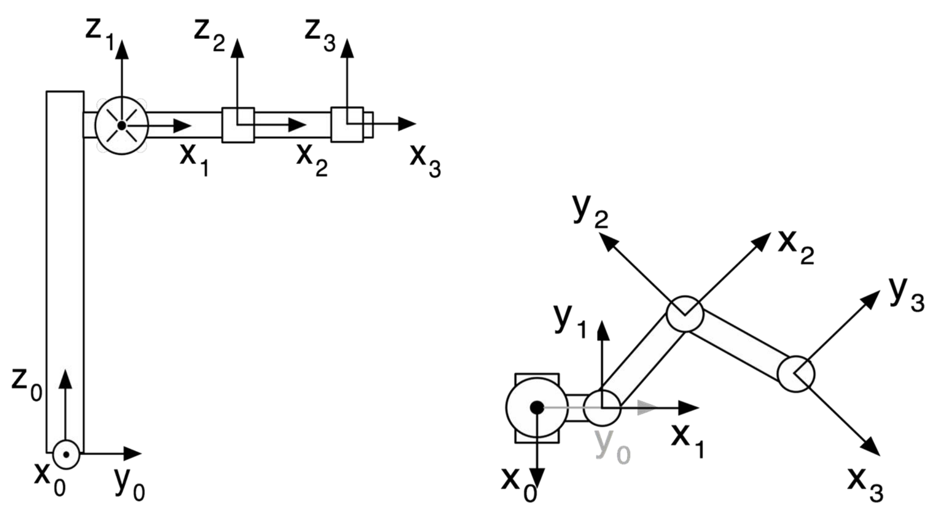
$$Spur(R_1) = 0.6 + 0.6 + 0.36 = 1.56 = 1 + 2cos(\alpha) \Rightarrow \alpha = 73.74°$$

Die Quaternion q lässt sich aus Rotationsachse und -winkel aufstellen:

$$q = \left(cos(\frac{\alpha}{2}), \vec{r}sin(\frac{\alpha}{2})\right) = (0.8, 0.2, -0.4, -0.4)$$

Lösung 2 (Vorwärtskinematik, Denavit-Hartenberg)

2.1 Lage der Koordinatensysteme



2.2 DH-Parameter

	d	θ	a	α
Gelenk 1	$150 \leq d_1 \leq 1650$	$90°$	100	$0°$
Gelenk 2	0	θ_2	500	$0°$
Gelenk 3	0	θ_3	500	$0°$

2.3 Transformationsmatrizen

Die einzelnen Transformationen setzen sich aus der Translation um d_i, der Rotation um θ_i, der Translation um a_i und der Rotation um α_i zusammen.

$$A_{0,1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{1,2} = \begin{pmatrix} cos(\theta_2) & -sin(\theta_2) & 0 & 500cos(\theta_2) \\ sin(\theta_2) & cos(\theta_2) & 0 & 500sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{2,3} = \begin{pmatrix} cos(\theta_3) & -sin(\theta_3) & 0 & 500cos(\theta_3) \\ sin(\theta_3) & cos(\theta_3) & 0 & 500sin(\theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.4 Gesamttransformation

Durch Matrixmultiplikation erhält man folgende Gesamttransformation:

$$A_{0,3} = \begin{pmatrix} -s_{\theta 2}c_{\theta 3} - c_{\theta 2}s_{\theta 3} & s_{\theta 2}s_{\theta 3} - c_{\theta 2}c_{\theta 3} & 0 & -500s_{\theta 2}c_{\theta 3} - 500c_{\theta 2}s_{\theta 3} - 500s_{\theta 2} \\ c_{\theta 2}c_{\theta 3} - s_{\theta 2}s_{\theta 3} & -s_{\theta 2}c_{\theta 3} - c_{\theta 2}s_{\theta 3} & 0 & 500c_{\theta 2}c_{\theta 3} - 500s_{\theta 2}s_{\theta 3} + 100 + 500c_{\theta 2} \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Unter Verwendung des Additionstheorems lassen sich die Ausdrücke vereinfachen:

$$A_{0,3} = \begin{pmatrix} -sin(\theta_2+\theta_3) & -cos(\theta_2+\theta_3) & 0 & -500sin(\theta_2+\theta_3) - 500sin(\theta_2) \\ cos(\theta_2+\theta_3) & -sin(\theta_2+\theta_3) & 0 & 500cos(\theta_2+\theta_3) + 100 + 500cos(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 3 (Vorwärtskinematik)

Die Lage des TCP ergibt sich aus $T_{TCP} = A_{0,3}$. Angabe der Lage mittels Rotationsmatrix und Translationsvektor.

3.1 Stellung $d_1 = 200$, $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = 0$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1100 \\ 200 \end{pmatrix}$$

3.2 Stellung $d_1 = 600$, $\theta_2 = 60$, $\theta_3 = 30$

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} -933,01 \\ 350 \\ 600 \end{pmatrix}$$

3.3 Stellung $d_1 = 200$, $\theta_2 = -45$, $\theta_3 = -15$

$$R = \begin{pmatrix} 0,87 & -0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,87 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} 786,56 \\ 703,55 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Lösung 4 (Differentielle inverse Kinematik)

4.1 Berechnung der Jacobi-Matrix

Aus dem kinematischen Modell aus Aufgabe 2 lässt sich eine Funktion für die Position des Endeffektors aufstellen:

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{0,3} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -500s_{\theta 2}c_{\theta 3} - 500c_{\theta 2}s_{\theta 3} - 500s_{\theta 2} \\ 500c_{\theta 2}c_{\theta 3} - 500s_{\theta 2}s_{\theta 3} + 100 + 500c_{\theta 2} \\ d_1 \end{pmatrix} = f(\vec{q})$$

Die Jacobi-Matrix ergibt sich dann aus:

$$J = \frac{\delta f}{\delta \vec{q}} = \begin{pmatrix} 0 & -500cos(\theta_2+\theta_3) - 500cos(\theta_2) & -500cos(\theta_2+\theta_3) \\ 0 & -500sin(\theta_2+\theta_3) - 500sin(\theta_2) & -500sin(\theta_2+\theta_3) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Invertieren der Jacobi-Matrix ergibt:

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{500}\frac{sin(\theta_2+\theta_3)}{sin(\theta_3)} & \frac{1}{500}\frac{cos(\theta_2+\theta_3)}{sin(\theta_3)} & 0 \\ \frac{1}{500}\frac{sin(\theta_2+\theta_3)+sin(\theta_2)}{sin(\theta_3)} & \frac{1}{500}\frac{-cos(\theta_2+\theta_3)-cos(\theta_2)}{sin(\theta_3)} & 0 \end{pmatrix}$$

4.2 Singularitäten

Die Jacobi-Matrix ist singulär für $\theta_3 = 0°, 180°$. Die inverse Matrix existiert für diese Gelenkwinkelstellungen nicht.